УДК 621.77

В. М. Михалевич[1], Ю. В. Добранюк[1]

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТОВСТОСТІННОЇ ТРУБИ ПІД РІВНОМІРНИМ ТИСКОМ

[1]Вінницький національний технічний університет

Розглянуто постановку та розв'язання класичної статично визначуваної задачі про напружений стан товстостінної труби під рівномірним тиском. Запропоновано інший підхід до розв'язання цієї задачі, що дозволило отримати нову форму розв'язку у параметричній формі, де як параметр використовується універсальний показник напруженого стану.

ВСТУП

У працях [1, 2, 3] обґрунтовано ефективність застосування показника напруженого стану η для розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла, в першу чергу задач формулювання умов граничного стану, де

$$\eta = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sqrt{3 \cdot I_2(D_\sigma)}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}, \tag{1}$$

$I_1(T_\sigma)$, $I_2(D_\sigma)$ – відповідно перший інваріант тензора і другий інваріант девіатора напружень; σ_1, σ_2, σ_3 – головні напруження; σ_i – інтенсивність напружень.

Показник напруженого стану η широко використовується при розв'язанні задач теорії підсумовування пошкоджень [4, 5, 6]. У той же час відсутні праці, в яких би використовували цей показник для здобуття аналітичних розв'язків прикладних задач визначення напруженого стану, зокрема, наведених у класичній літературі.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Розглянемо напружений стан товстостінної труби, що доведена до пластичного стану під дією рівномірного внутрішнього або зовнішнього тиску без осьового навантаження (рис. 1).

У цьому випадку осьове напруження $\sigma_z = 0$, а радіальне та колове напруження σ_ρ та σ_θ не залежать від координат z та θ. Отже, маємо вісесиметричну задачу для плоского напруженого стану. Розв'язок цієї задачі наведений у різних працях [8, 9, 10].

Запишемо умови рівноваги

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \tag{2}$$

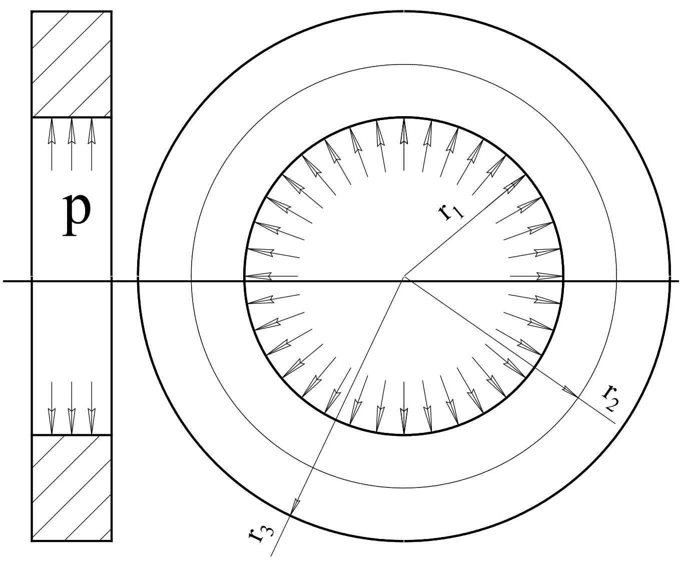

Рисунок 1 – Схематичне зображення товстостінної труби під рівномірним внутрішнім тиском

За вказаних умов дотичні напруження не виникають, отже радіальне та колове напруження є головними. Тоді умова пластичності має вигляд [8, 9, 10]

$$\sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_\rho \cdot \sigma_\theta = \sigma_s^2, \tag{3}$$

де σ_s – границя текучості конкретного матеріале при випробуванні на розтяг.

У працях [8, 9, 10] розв'язок цієї задачі отримано шляхом введення нових змінних та переходу до параметричних рівнянь. Так у [9] введено змінні

$$\frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} = \sigma_{cp}; \quad \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} = \sigma_0. \tag{4}$$

в яких умова пластичності стає тотожною канонічному рівнянню еліпса

$$\frac{\left(\dfrac{\sigma_{cp}}{\sigma_s}\right)^2}{1} + \frac{\left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_s}\right)^2}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 1, \tag{5}$$

параметричні рівняння якого мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_{cp}}{\sigma_s} = \cos(\varphi); \\ \dfrac{\sigma_0}{\sigma_s} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin(\varphi), \end{cases} \tag{6}$$

де φ − параметр.

Шляхом розв'язання системи лінійних рівнянь (4) відносно σ_ρ, σ_θ, з урахуванням (6) та формули для косинуса суми кутів отримаємо співвідношення, що наведено в [9],

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_s \cdot \cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right); \\ \sigma_\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_s \cdot \cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Геометрична інтерпретація цих співвідношень, що наведена в [9], містить помилки, що усунені на рис. 2 (на рис. 7.18 [9] використовується позначення σ_s^* ($\sigma_s^* = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_s$), розшифрування якого відсутнє; для $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$ та $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, а також для колового напруження σ_θ при $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, замість σ_s^* поставлено σ_s).

У цій задачі напруження можуть бути визначені без використання рівнянь зв'язку між компонентами тензорів напружень та деформацій (або швидкостей деформацій). Подібні задачі відносять до статично визначуваних. Оскільки в нашому випадку до рівняння рівноваги додається умова пластичності, маємо умовно статично визначувану задачу [10].

Співвідношення (2) з урахуванням (7) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язанням цього рівняння нескладно отримати залежність між радіусом ρ та параметром θ [9]:

$$\rho^2 = \frac{B^2}{\sin(\varphi)} \cdot e^{\varphi \cdot \sqrt{3}}, \tag{8}$$

де стала B визначається за початковими умовами.

Отже, співвідношення (7), (8) є загальним розв’язком поставленої задачі за параметром φ.

У [9] зазначено, що кожній сукупності значень σ_ρ, σ_θ та параметра φ на контурі пластичності відповідають певні точки. Звертається увага, що параметр φ не збігається з кутом, що визначає положення радіуса-вектора еліпса.

Отже, недоліком наведеного розв’язку є певний формалізм у використанні вказаного параметра.

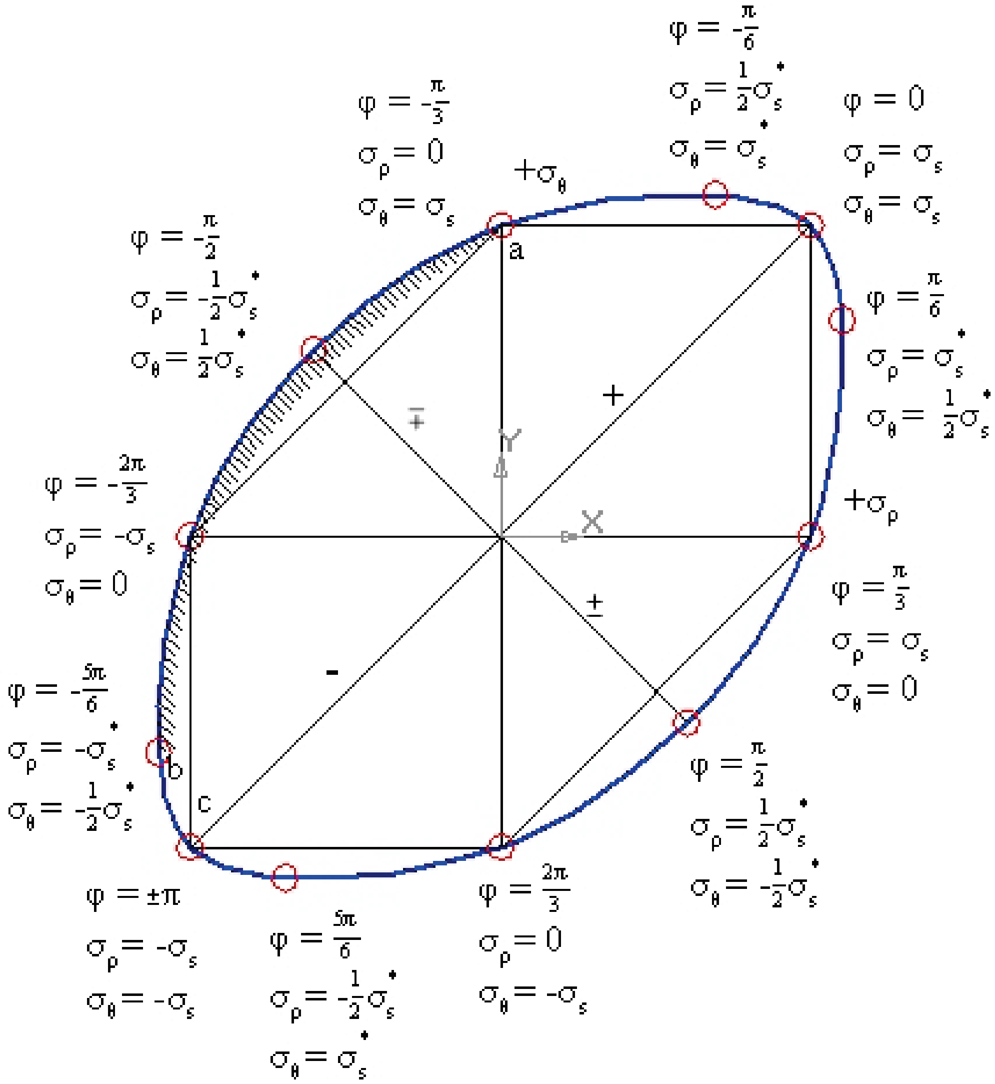

Рисунок 2 – Графічне представлення умови пластичності товстостінної труби під рівномірним внутрішнім тиском

Розв’язання поставленої задачі можна знайти дещо іншим шляхом. У працях [1, 2, 3] зазначається, що між фізично можливими варіантами плоского напруженого стану та значеннями показника η існує взаємно однозначна відповідність. Як наслідок, сукупність значень (σ_u, η) на відміну від, наприклад, сукупності значень (σ_u, μ_σ), (μ_σ – параметр Надаї–Лоде), однозначно визначають головні напруження за умов плоского напруженого стану. У цьому полягає головна перевага показника η перед іншими безрозмірними показниками виду напруженого стану до яких крім параметра Надаї-Лоде належить третій інваріант напрямного тензора напружень D; кут ψ виду напруженого стану та деякі інші, що використовуються різними авторами.

Далі використовуватимемо співвідношення, що справедливі для пластичної області за умов плоского напруженого стану

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_\rho}{\sigma_s} = \dfrac{1}{6}\cdot\left(3\cdot\eta - \sqrt{3}\cdot\sqrt{4-\eta^2}\right); \\ \dfrac{\sigma_\theta}{\sigma_s} = \dfrac{1}{6}\cdot\left(3\cdot\eta + \sqrt{3}\cdot\sqrt{4-\eta^2}\right); \\ -1 \le h \le 1. \end{cases} \tag{9}$$

Останні співвідношення задовольняють умову пластичності Мізеса (3).

З урахуванням (9) диференціальне рівняння рівноваги може бути зведене до звичайного диференціального рівняння з відокремленими змінними

$$2\cdot\int\frac{d\rho}{\rho} = \int\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-\eta^2}} + \frac{\eta}{\sqrt{4-\eta^2}}\right)\cdot d\eta + \ln(C), \tag{10}$$

де C − стала інтегрування, що визначається за початковими умовами.

На основі рівняння (10) можна отримати залежність між радіусом ρ та параметром, що відіграє показник напруженого стану η

$$\rho^2 = \frac{C\cdot e^{\sqrt{3}\cdot\arcsin\left(\frac{1}{2}\cdot\eta\right)}}{\sqrt{4-\eta^2}}. \tag{11}$$

Зауважимо, що умова пластичності (3) в координатах (σ_u, η) представляє горизонтальну лінію $\sigma_i = \sigma_s$.

ВИСНОВКИ

Отже, ми отримали загальний розв'язок задачі про напружений стан товстостінної труби під рівномірним тиском у новій формі (9), (11), в якій параметром слугує показник напруженого стану η. Подальші задачі полягають у встановленні властивостей отриманого розв'язку та дослідженні окремих задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич. – Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1998. – 195 с.

2. Lebedev A. A. On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics / A. A. Lebedev, V. M. Mikhalevich // Strength of Materials : Plenum Publishing Corporation (USA). – 2003. – № 35 (3). – P. 217–224.

3. Лебедев А. А. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов / А. А. Лебедев, В. М. Михалевич // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 5–14.

4. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / В. А. Огородников. − К. : Выща шк., 1983. − 200 с.

5. Михалевич В. М. Вісесиметрична осадка циліндричних заготовок / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк // Наукові нотатки : міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). − Луцьк. − 2009. − Випуск 25, ч. 1. − С. 241−249.

6. Михалевич В. М. Моделирование пластического деформирования цилиндрического образца при торцевом сжатии / В. М. Михалевич, А. А. Лебедев, Ю.В. Добранюк // Пробл. прочности. – 2011. – № 6. – С. 5–22.

7. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, Yu Dobranyuk // Strength of Materials. – 2011. – V. 43, № 6. – P. 591–603.

8. Надаи А. Пластичность и разрушение твёрдых тел / А. Надаи. – М. : Мир, 1969. – Т. 2. – 863 с.

9. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давленим : учебник для вузов. / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1977. – 423 с.

10.Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.

REFERENCES

1. Mykhalevych V. M. Tenzorni modeli nakopychennya poshkodzhen' / V. M. Mykhalevych – Vinnytsya : UNIVERSUM–Vinnytsya, 1998. – 195 p.

2. Lebedev A. A., Mikhalevich V. M. On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics/ A. A. Lebedev, V. M. Mikhalevich // Strength of Materials N 35 (3) , Plenum Publishing Corporation (USA). – 2003. P. 217–224.

3. Lebedev A. A. Stress invariant selection in solving problems of material mechanics / A. A. Lebedev, V. M. Mikhalevich // Problemy Prochnosti. – 2003. – № 3. – P. 5–14.

4. Ogorodnikov V. A. Otsenka deformiruyemosti metallov pri obrabotke davleniyem / V. A. Ogorodnikov – K. : Vyshcha shk., 1983. – 200 s.

5. Mikhalevich V. M. Modelirovaniye plasticheskogo deformirovaniya tsilindricheskogo obraztsa pri tortsevom szhatii / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, YU. V. Dobranyuk // Probl. prochnosti. – 2011. – № 6. – P. 5–22.

6. Mikhalevich V. M., Lebedev A. A., Dobranyuk YU. V. 2011. Modelirovaniye plasticheskogo deformirovaniya tsilindricheskogo obraztsa pri tortsevom szhatii // Probl. prochnosti. – V 6. – P. 5–22.

7. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, Yu Dobranyuk // Strength of Materials. – 2011, V. 43, No. 6, P. 591-603.

8. Nadai A.–Theory of flow and fracture of solids / A. Nadai. – New York – Toronto – London, 1963. V 2.

9. Storojev M.V., Popov A.E. Theory of Metal Forming. M.: Engineering, 1977. 423 p.

10.Malinin N.N. Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti (Applied theory of plasticity and creep). Moscow: Mashinostroenie, 1975. – 400 p.

В. М. Михалевич[1], Ю. В. Добранюк[1]

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТОВСТОСТІННОЇ ТРУБИ ПІД РІВНОМІРНИМ ТИСКОМ

[1]Вінницький національний технічний університет

Об'єкт дослідження – напружений стан товстостінної труби під рівномірним тиском.

Мета роботи – аналіз класичного розв'язку задачі визначення напруженого стану товстостінної труби під рівномірним тиском та розробка іншого підходу до отримання розв'язку цієї задачі в новій формі.

Розглянуто постановку та розв'язання класичної статично визначуваної задачі про напружений стан товстостінної труби під рівномірним тиском. Запропоновано інший підхід до розв'язання цієї задачі, що дозволило отримати нову форму розв'язку у параметричній формі, де як параметр використовується універсальний показник напруженого стану.

Ключові слова: товстостінна труба; рівномірний тиск; напружений стан; показник напруженого стану.

Михалевич Володимир Маркусович, доктор технічних наук, професор, Вінницький національний технічний університет, завідувач кафедри вищої математики ВНТУ, e-mail: vmykhal@gmail.com, тел. +380934055233, Україна, 21000, м. Вінниця, вул. Кв'ятека, 15, кв. 9.

Добранюк Юрій Володимирович, кандидат технічних наук, Вінницький національний технічний університет, старший викладач кафедри вищої математики ВНТУ, e-mail: dobranuk@mail.ru, тел. +380989962730, Україна, 21000, м. Вінниця, вул. Воїнів Інтернаціоналістів, 3, к. 407.

V. M. Mykhalevych[1], Yu. V. Dobraniuk[1]

STRESS STATE OF THE THICK-WALLED PIPES SUBJECTED UNIFORM PRESSURE

[1]Vinnytsia National Technical University

A research object is the stress state of the thick-walled pipes subjected uniform pressure.

The purpose of the work is the analysis of the classical solution of the problem of determining the stress state of a thick-walled pipes under uniform pressure and the development of a other approach for obtaining the solution of this problem in a new form.

Statement and solution of the classical statically determinate problem about state of stress of thick-walled pipes under uniform pressure is considered. Another approach to solving this problem is proposed. That had allowed to obtain a new form of solutions in parametric form. As an parameter uses the universal indicator of the stress state.

Keywords: thick-walled pipe; uniform pressure; stress state; indicator of the stress state.

Mykhalevych Volodymyr Markusovych, Doctor of Technical Science, Professor, the Vinnytsya National Technical University, Head of Department of Higher Mathematics of VNTU, e-mail: vmykhal@gmail.com, tel. +380934055233, Ukraine, 21000, Vinnytsya, Kv'yatyka str.,15, 9.

Dobraniuk Yurii Volodymyrovych, Candidate of Science (Engineering), the Vinnytsya National Technical University, Senior Lecture of Department of Higher Mathematics of VNTU, e-mail: dobranuk@mail.ru, tel. +380989962730, Ukraine, 21000, Vinnytsya, Vojiniv Internacionalistiv str., 3, 407.

В. М. Михалевич[1], Ю. В. Добранюк[1]

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПОД РАВНОМЕРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

[1]Винницкий национальный технический университет

Объект исследования − напряженное состояние толстостенной трубы под равномернным давлением.

Цель работы – анализ классического решения задачи определения напряженного состояния толстостенной трубы под равномерным давлением и разработка иного подхода для получения решения этой задачи в новой форме.

Рассмотрены постановка и решение классической статически определимой задачи о напряженном состоянии толстостенной трубы под равномерным давлением. Предложен иной подход к решению данной задачи, что позволило получить новую форму решения в параметрической форме, где в качестве параметра используется универсальный показатель напряженного состояния.

Ключевые слова: толстостенная труба; равномерное давление; напряженное состояние; показатель напряженного состояния.

Михалевич Владимир Маркусович, доктор технических наук, профессор, Винницкий национальный технический университет, заведующий кафедры высшей математики ВНТУ, e-mail: vmykhal@gmail.com, тел. +380934055233, Украина, 21000, г. Винница, ул. Квятыка, 15, к. 9.

Добранюк Юрий Владимирович, кандидат технических наук, Винницкий национальный технический университет, старший преподаватель кафедры высшей математики ВНТУ, e-mail: dobranuk@mail.ru, тел. +380989962730, Украина, 21000, г. Винница, ул. Воинов Интернационалистов, 3, к. 407.