

## Володимир Михалевич\*

Доктор технічних наук, професор  
Вінницький національний технічний університет  
21021, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна  
<https://orcid.org/0000-0003-1557-7331>

## Олександр Грушко

Доктор технічних наук, професор  
Вінницький національний технічний університет  
21021, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна  
<https://orcid.org/0000-0001-5551-375X>

## Юрій Добранюк

Кандидат технічних наук, доцент  
Вінницький національний технічний університет  
21021, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна  
<https://orcid.org/0000-0001-6387-6331>

## Оксана Тютюнник

Кандидат педагогічних наук, доцент  
Вінницький національний технічний університет  
21021, вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-8544-4246>

## Напружений стан товстостінної труби під дією внутрішнього тиску та осової сили

**Анотація.** Розглянуто класичну задачу визначення напруженого стану товстостінної труби з нерухомими днищами під дією внутрішнього тиску та породжуваної ним осової сили. За вказаних умов осова деформація дорівнює нулю. Приймається схема ідеально пластичного тіла. Розроблені інформаційні Maple-технології всіх ключових етапів розв'язування вказаної задачі. Для можливості здійснити аналіз матеріалу труб сприймати пластичну деформацію без руйнування основне диференціальне рівняння задачі сформульовано та розв'язано відносно показника напруженого стану, що дорівнює відношенню першого інваріанта тензора напружень до інтенсивності напружень. Показано, що крайові умови приводять до системи трьох лінійних неоднорідних рівнянь відносно невідомих параметрів рівнянь для напружень. Визначено, що ця система завжди має розв'язок, оскільки визначник матриці системи обернено пропорційний квадрату радіуса межі, що відділяє пластичну та пружну області труби і завжди відмінний від нуля. Показано, що рівняння, яке встановлює залежність між прикладеним тиском і радіусом межі між пластичною та пружною областями, не піддається прямому розв'язанню відносно невідомого радіуса. Однак його доцільно застосовувати у формі, розв'язаній відносно тиску. Побудовані розподіли компонентів напружень, нормованих за межею текучості, по товщині труби узгоджуються з літературними даними, які підтверджують, що максимальні значення колового навантаження спостерігаються на зовнішній поверхні. Це трактується, як ознака достовірності теоретичного розв'язку, що узгоджується з експериментальними даними Бріджмена, згідно яким руйнування матеріалу товстостінної труби, що навантажена внутрішнім тиском, починається із зовнішньої поверхні. Отримані в цій роботі закономірності зміни показника напруженого стану, удосконалюють наведене обґрунтування,

### Suggested Citation:

Mykhalevych, V., Hrushko, O., Dobraniuk, Y., & Tiutiunnyk, O. (2024). Stressed state of a thick-walled pipe under the action of internal pressure and axial force. *Journal of Mechanical Engineering and Transport*, 10(2), 92-98. doi: 10.63341/vjmet/2.2024.92.

\*Corresponding author



оскільки з позицій теорії деформовності матеріалів при холодному деформуванні граничні деформації матеріалу звичайно зменшуються з ростом показника напруженого стану, найбільші значення якого мають місце в точках зовнішньої поверхні і досягають значення  $\sqrt{3}$

**Ключові слова:** товстостінна труба; рівномірний тиск; напружений стан; показник напруженого стану

## Вступ

Авторами [1] зазначається, що в залежності від ступеня пластичної деформації до руйнування матеріали можна розділити на ковкі (пластичні) та крихкі. Для пластичних матеріалів характерним є значно більша пластична деформація. З посиланням на [2, 3] стверджується, що виникнення та поширення пластичних тріщин у металах є важливим питанням аналізу руйнування інженерних конструкцій, зокрема, таких як кораблі та морські споруди. Зазначається, що зручне прогнозування початку пластичного руйнування потребує визначення напружено-деформованого стану та моделей руйнування, що адекватно відображають процеси руйнування, але не вимагають масштабних випробувань матеріалу для калібрування.

Відповідно, в сучасних працях до таких моделей відносять аналітичні представлення залежності еквівалентної пластичної деформації до руйнування від показника напруженого стану, що визначається відношенням першого інваріанта тензора напружень до інтенсивності напружень. З огляду на кількість посилань, класичними стали праці Райса-Трейсі, Макклінтока, Джонсона-Кука, Кокрофта-Латама-Оха, Кліфта, Броза, Вержбіцького разом з його учнями, Деля та багатьох інших [1–6].

Ці питання привертати значну увагу і вітчизняних науковців. В рамках теорії підсумовування пошкоджень широкий комплекс питань висвітлено в [7, 8], питання оцінки деформовності під час деяких технологічних процесів розглянуто авторами [9–13]. Численні аналітичні представлення залежностей граничних деформацій від показника напруженого стану [14–16] характеризуються монотонним зменшенням граничної деформації з ростом показника напруженого стану, що повністю узгоджується із зазначеними закордонними публікаціями.

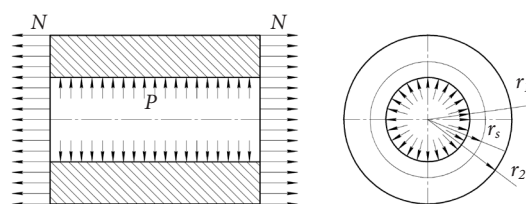
Для застосування теорії підсумовування пошкоджень у розв'язанні прикладних задач важливо точно визначати напружено-деформований стан заготовки під час технологічної операції або елемента конструкції в процесі його експлуатації. Упродовж останніх десятиліть увага дедалі більше зміщується на використання методу скінченних елементів, реалізованого в спеціалізованих програмних комплексах. Водночас спостерігається нестача досліджень, що спрямовані на забезпечення можливостей застосування цієї теорії через використання класичних розв'язків задачі визначення напружено-деформованого стану.

Мета: розробити сучасні інформаційні Maple-технології для розв'язання та дослідження задачі визначення компонент напружень та показника напруженого

стану в точках поперечного перерізу товстостінної труби під дією внутрішнього тиску та осової сили.

## Результати

На Рисунку 1 зображено схему товстостінної труби з днищами, що не можуть зсуватися в осьовому напрямку. Внутрішній та зовнішній радіуси труби –  $r_p$ ,  $r_2$ . Труба навантажена заданим внутрішнім тиском  $p$ . Надалі вважатимемо матеріал труби нестисливим та незміцнюваним.



**Рисунок 1.** Схематичне зображення навантаженої товстостінної труби

**Джерело:** розроблено авторами

Під дією внутрішнього тиску на днища труби виникає навантаження труби осовою силою  $N$  – одною з невідомих, що мають бути визначені в процесі розв'язання задачі. Оскільки за умовою днища труби не можуть зсуватися в осьовому напрямку, приймаємо умову рівності нулю осової деформації в будь-якій точці поперечного перерізу труби.

$$\varepsilon_z = 0. \quad (1)$$

Ця умова пов'язана також з гіпотезою плоских перерізів, що може вважатися справедливою для перерізів, достатньо віддалених від торців труби.

Пружна деформація  $\varepsilon_z$  визначається трьома головними напруженнями: осовим  $\sigma_z$ , коловим  $\sigma_\phi$  та радіальним  $\sigma_r$  за допомогою співвідношення.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2E} [2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\phi], \quad (2)$$

де  $E$  – модуль пружності.

З урахуванням відсутності осової деформації (1), із останнього співвідношення впливає залежність між компонентами головних напружень:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\phi}{2}. \quad (3)$$

Обчислимо інтенсивність напружень:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{(\sigma_z - \sigma_\phi)^2 + (\sigma_\phi - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\sigma_z^2 - 2\sigma_z\sigma_\phi + 2\sigma_\phi^2 - 2\sigma_\phi\sigma_r + 2\sigma_r^2 - 2\sigma_r\sigma_z}{2}}, \quad (4)$$

з урахуванням (3):

$$\begin{aligned} & \text{subs}\left(\sigma_z = -\frac{\sigma_\phi + \sigma_r}{2}, \%; \text{lhs}(\%) = \text{simplify}(\text{rhs}(\%))\right) \\ \sigma_i = & \frac{1}{2} \left( 2 \left( \frac{1}{2} \sigma_\phi + \frac{1}{2} \sigma_r \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{2} \sigma_\phi + \frac{1}{2} \sigma_r \right) \sigma_\phi + 2 \sigma_\phi^2 - 2 \sigma_\phi \sigma_r + 2 \sigma_r^2 \right. \\ & \left. - 2 \sigma_r \left( \frac{1}{2} \sigma_\phi + \frac{1}{2} \sigma_r \right) \right) \sqrt{2} \\ & \sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{3} \operatorname{sgn}(\sigma_\phi - \sigma_r) (\sigma_\phi - \sigma_r), \end{aligned} \quad (5)$$

Під час дії тільки внутрішнього тиску справедлива нерівність  $\sigma_\phi - \sigma_r > 0$ , отже:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\phi - \sigma_r). \quad (6)$$

Обчислимо середнє напруження:

$$\sigma = \frac{\sigma_z + \sigma_\phi + \sigma_r}{3}. \quad (7)$$

З урахуванням (3)

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{\sigma_z + \sigma_\phi + \sigma_r}{3}; \text{subs}\left(\sigma_z = -\frac{\sigma_\phi + \sigma_r}{2}, \%\right), \\ \sigma = & \frac{1}{3} \sigma_z + \frac{1}{3} \sigma_\phi + \frac{1}{3} \sigma_r. \end{aligned} \quad (8)$$

Порівнюючи (3) та (8), звернемо увагу, що осьове напруження дорівнює середньому:

$$\sigma_z = \sigma. \quad (9)$$

Обчислимо показник напруженого стану:

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_i} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\phi - \sigma_r) = \sqrt{3} \frac{\sigma_\phi + \sigma_r}{\sigma_\phi - \sigma_r}. \quad (10)$$

За умовою пластичності Хубера-Мізеса.

$$\sigma_i = \sigma_s, \quad (11)$$

де  $\sigma_i = \sigma_s = \text{const}$  – напруження течії.

Визначення напружень в пластичній області здійснюється звичайно на основі диференціального рівняння рівноваги елемента труби [17]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\phi - \sigma_r}{r} = 0. \quad (12)$$

Відповідно теорії малих пружно-пластичних деформацій:

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma) \\ \varepsilon_\phi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_\phi - \sigma) \\ \varepsilon_r = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_r - \sigma), \end{cases} \quad (13)$$

де  $\varepsilon_i$  – інтенсивність деформацій.

Із першого рівняння (13) за рівності нулю осьової деформації випливають співвідношення (8), (9).

Відповідно до прийнятої схеми ідеально пластичного тіла на основі (6), (11) матимемо:

$$\sigma_\phi - \sigma_r = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s, \quad (14)$$

або

$$\sigma_\phi - \sigma_r + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s = 0, \quad (15)$$

і тоді вираз для показника напруженого стану (10) та диференціальне рівняння (12) можуть бути перетворені до:

$$\eta = \sqrt{3} + 3 \frac{\sigma_r}{\sigma_s}, \quad (16)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma_s}{r} = 0. \quad (17)$$

На основі (16)

$$\sigma_r = \sigma_s \cdot \frac{\eta - \sqrt{3}}{3} = \sigma_s \cdot \bar{\eta} \quad (18)$$

і диференціальне рівняння (17) можемо записати відносно нормованого показника напруженого стану  $\bar{\eta}$ :

$$\frac{d\bar{\eta}}{dr} - \frac{2\sqrt{3}}{3r} = 0. \quad (19)$$

Маємо звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та проінтегруємо отримане рівняння:

$$\int d\bar{\eta} = \int_{r_s}^r \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{dr}{r}, \quad r_1 \leq r \leq r_s \quad (20)$$

або

$$\bar{\eta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + C \right), \quad (21)$$

де  $r_s$  – радіус межі, що розділяє пружну та пластичну області;  $C$  – стала інтегрування.

На основі останньої рівності та рівностей (18) отримаємо:

$$\eta = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \left( \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + C \right), \quad (22)$$

$$\sigma_r = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + C \right). \quad (23)$$

На основі отриманої формули для радіального напруження в пластичній області та з урахуванням (14), (3) отримуємо, відповідно, формули для колового напруження

$$\sigma_\phi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + C + 1 \right) \quad (24)$$

та осьового

$$\sigma_z = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + C + \frac{1}{2} \right). \quad (25)$$

Використаємо умову рівності радіального напруження тиску  $-p$  на внутрішній поверхні труби, тобто

$$\sigma_r = -p \text{ при } r = r_1, \quad (26)$$

тоді, враховуючи (23), отримаємо

$$p = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \ln \left( \frac{r_s}{r_1} \right) - C \right). \quad (27)$$

В пружній області при  $r_s < r \leq r_2$  радіальне та колове навантаження визначаються за формулами [17]

$$\sigma_\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( A_1 + \frac{A_2}{r^2} \right), \quad (28)$$

$$\sigma_r = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( A_1 - \frac{A_2}{r^2} \right). \quad (29)$$

На зовнішній поверхні труби радіальне напруження дорівнює нулю, отже, із (29) випливає:

$$A_1 - \frac{A_2}{r_2^2} = 0. \quad (30)$$

На межі між пружною та пластичною областями значення радіального та колового навантажень, визначені за співвідношеннями (23) і (29), а також (24) і (28), повинні збігатися, отже:

$$A_1 - \frac{A_2}{r_s^2} - C = 0, \quad (31)$$

$$A_1 + \frac{A_2}{r_s^2} - C = 1. \quad (32)$$

Останні три співвідношення є системою трьох лінійних неоднорідних рівнянь відносно невідомих  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $C$ . Для дослідження існування розв'язку цієї системи обчислимо її визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{r_2^2} & 0 \\ 1 - \frac{1}{r_s^2} & -1 \\ 1 - \frac{1}{r_s^2} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{r_2^2} & 0 \\ 0 - \frac{2}{r_s^2} & -1 \\ 1 - \frac{1}{r_s^2} & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{r_2^2} \\ 0 - \frac{2}{r_s^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{r_s^2} \neq 0 \text{ при } r_1 \leq r_s \leq r_2. \quad (33)$$

Для обчислення визначника використали метод за нулення: елементи третього рядка помножили на  $(-1)$  та додали до відповідних елементів другого рядка. Оскільки визначник відмінний від нуля, система має розв'язок. Отримаємо такий розв'язок:

$$\text{eqs} := A_1 - \frac{A_2}{r_2^2} = 0, A_1 - \frac{A_2}{r_s^2} - C = 0, A_1 + \frac{A_2}{r_s^2} - C = 1; \\ \text{solve}(\{\text{eqs}\}, \{A_1, A_2, C\})$$

$$\left\{ A_2 = \frac{1}{2} r_s^2, C = \frac{1}{2} \frac{-r_s^2 + r_2^2}{r_2^2}, A_1 = \frac{1}{2} \frac{r_s^2}{r_2^2} \right\}. \quad (34)$$

Щоб отримати залежність радіуса межі, що відділяє пружну та пластичну області, від прикладеного тиску підставимо в рівняння (27) зойно отримане значення сталої  $C$ :

$$p = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \ln \left( \frac{r_s}{r_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{r_s^2 - r_2^2}{r_2^2} \right). \quad (35)$$

Із цього рівняння неможливо явно визначити радіус  $r_s$ , проте для заданого співвідношення  $k_{12}$

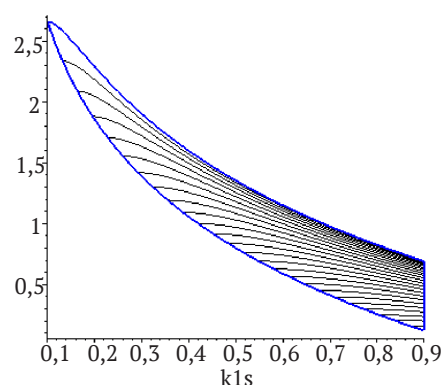
$$0 < k_{12} = \frac{r_1}{r_2} < 1 \quad (36)$$

можна отримувати явні залежності відносного тиску  $\frac{p}{\sigma_s}$  від відносного радіуса вказаної межі  $\frac{r_1}{r_2} \leq k_{1s} = \frac{r_1}{r_s} \leq 1$ :

$$\frac{p}{\sigma_s} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( 1 - 2 \ln(k_{1s}) - \left( \frac{k_{12}}{k_{1s}} \right)^2 \right). \quad (37)$$

Побудуємо графіки таких залежностей (Рис. 2):

```
> a0:=0.1:an:=0.9:N:=25;
[seq(a0+(an-a0)*si/N,si=0..N)];
sq:=seq([k1s,pss(i,k1s),k1s=i..1],i in [seq(a0+(an-a0)*si/N,si=0..N)]);
plot([t,pss(t,t),t=a0..an],[an,pss(t,an),t=a0..an],sq,k1s=a0..an,color=[blue$3,black$N],thickness=[2$3,1$N]);
```



**Рисунок 2.** Графік залежностей відносного тиску від відносного радіуса

**Джерело:** розроблено авторами

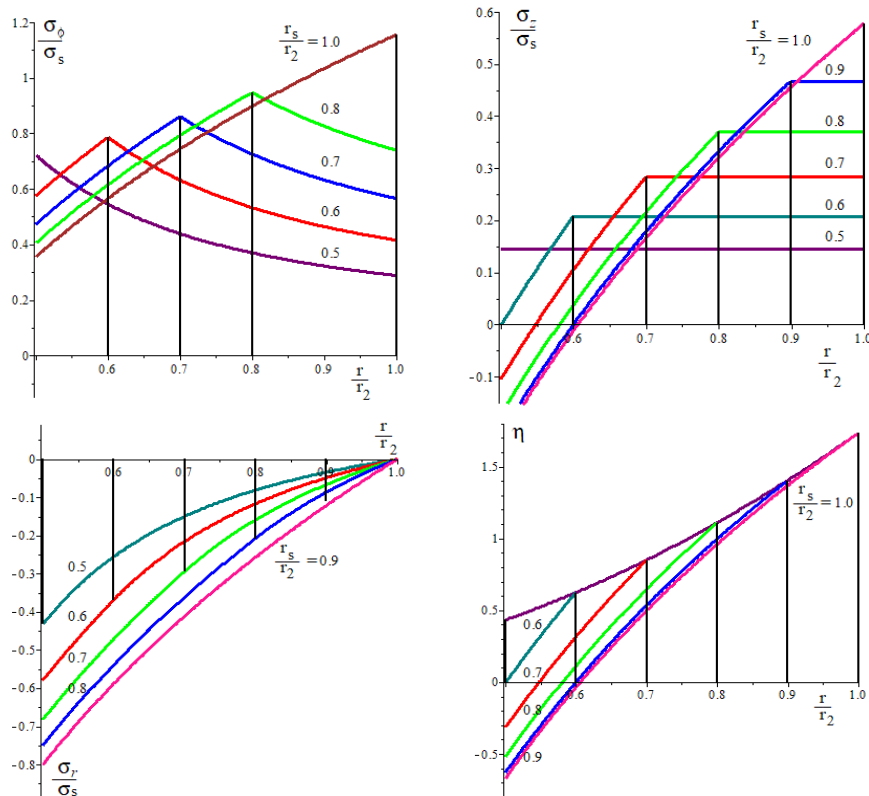
З урахуванням знайдених параметрів (34) запишемо на основі (28), (29), (3), (10) формули для напружень та показника напруженого стану в пружній області:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \frac{r_s}{r_2} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \frac{r_s}{r_2} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 \right) \\ \sigma_z &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( \frac{r_s}{r_2} \right)^2 \\ \eta &= \sqrt{3} \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \end{aligned} \right\} r_s \leq r \leq r_2 \quad (38)$$

та на основі (23), (24), (25), (22) – в пластичній області:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( 2 \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + \left( \frac{r_s}{r_2} \right)^2 - 1 \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( 2 \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + \left( \frac{r_s}{r_2} \right)^2 + 1 \right) \\ \sigma_z &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \left( 2 \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + \left( \frac{r_s}{r_2} \right)^2 \right) \\ \eta &= \sqrt{3} \left( 2 \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) + \left( \frac{r_s}{r_2} \right)^2 \right) \end{aligned} \right\} r_1 \leq r \leq r_s. \quad (39)$$

На Рисунку 3 наведено графіки зміни компонент напружень та показника напруженого стану в пружній та пластичних областях по товщині труби. Криві, зі значенням  $\frac{r_s}{r_2} = 1$ , відповідають величині граничного тиску, коли вичерпується несуча здатність труби (пластична область поширюється на всю товщину). Максимальність колових напружень на зовнішній поверхні труби в літературі трактується як ознака достовірності теоретичного розв'язку експериментальним даним Бріджмена, згідно з якими руйнування матеріалу товстостінної труби, що навантажена внутрішнім тиском, починається із зовнішньої поверхні.



**Рисунок 3.** Залежності нормованих напружень  $\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_s}$ ,  $\frac{\sigma_z}{\sigma_s}$ ,  $\frac{\sigma_r}{\sigma_s}$  та показника напруженого стану від відношення  $\frac{r}{r_2}$  за різних значень  $\frac{r_s}{r_2}$

**Примітки:** значення  $\frac{r_s}{r_2}$  для кожної кривої дорівнюють абсцисам вертикальних ліній для розрахунків за співвідношеннями (38) та (39) прийнято  $r_1 = 0.5$ ;  $r_2 = 1$

**Джерело:** розроблено авторами

Результати дослідження свідчать, що закономірності зміни показника напруженого стану удосконалюють наведене обґрунтування, оскільки з позицій теорії деформовності матеріалів при холодному деформуванні граничні деформації матеріала звичайно зменшуються з ростом показника напруженого стану, найбільші значення якого мають місце в точках зовнішньої поверхні.

## Висновки

Удосконалено теоретичне обґрунтування відомих експериментальних закономірностей, встановлених у досліджах Бріджмена. Зокрема, підтверджено, що під час

навантаження товстостінних труб внутрішнім тиском руйнування починається із зовнішньої поверхні. Традиційне пояснення цього явища, засноване лише на максимальних значеннях напружень у точках зовнішньої поверхні, є неповним, оскільки не враховує впливу граничних пластичних деформацій, що значною мірою залежать від показника напруженого стану. Авторами вперше запропоновано використати показник напруженого стану для аналізу вказаних експериментальних закономірностей, встановлених у досліджах Бріджмена, що дозволило повніше врахувати можливі механізми руйнування. У роботі отримано та досліджено аналітичні

формули для обчислення показника напруженого стану в пружній та пластичній областях по товщині труби. Встановлено, що максимальні значення цього показника спостерігаються на зовнішній поверхні труби.

Це узгоджується з експериментальними даними та відомими емпіричними залежностями, згідно з якими гранична пластична деформація матеріалів зменшується зі збільшенням значень показника напруженого стану.

### Список використаної літератури

- [1] Park, S.J., Cerik, B.C., & Choung, J. (2020). Comparative study on ductile fracture prediction of high-tensile strength marine structural steels. *Ships and Offshore Structures*, 15(sup1), S208-S219. doi: 10.1080/17445302.2020.1743552.
- [2] Can Cerik, B., Lee, K., Park, S.-J., & Choung, J. (2019). Simulation of ship collision and grounding damage using Hosford-Coulomb fracture model for shell elements. *Ocean Engineering*, 173, 415-432. doi: 10.1016/j.oceaneng.2019.01.004.
- [3] Can Cerik, B., Ringsberg, J.W., & Choung, J. (2019). Revisiting MARSTRUCT benchmark study on side-shell collision with a combined localized necking and stress-state dependent ductile fracture model. *Ocean Engineering*, 187, article number 106173. doi: 10.1016/j.oceaneng.2019.106173.
- [4] Chenxu, Z., Lei, M., Jinquan, Z., Ruinian, J., & Zhe, J. (2021). Ductile fracture characterization of A36 steel and comparative study of phenomenological models. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 33(1), article number 4020421, doi: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0003543.
- [5] Qin, S., & Beese, A.M. (2021). Identification of stress state dependent fracture micromechanisms in DP600 through representative volume element modeling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 194, article number 106209. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106209.
- [6] Noura, M., Oliveira, M.C., Khalfallah, A., Alves, J.L., & Menezes, L.F. (2023). Comparative fracture prediction study for two materials under a wide range of stress states using seven uncoupled models. *Engineering Fracture Mechanics*, 279, article number 108952. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108952.
- [7] Mykhalevych, V.M. (1998). *Tensor models of damage accumulation*. Vinnytsia: UNIVERSUM-Vinnytsia.
- [8] Mykhalevych, V.M., Dobranyuk, Yu.V., & Tyutyunnyk, O.I. (2024). *Models of damage accumulation in isotropic materials during cold two-stage deformation*. Vinnytsia: VNTU.
- [9] Grushko, O.V., Ogorodnikov, V.A., & Slobodyanyuk, Yu.O. (2019). Deformability of low-carbon wire during its multi-stage cold drawing. *Bulletin of Vinnytsia Polytechnic Institute*, 3, 103-110. doi: 10.31649/1997-9266-2019-144-3-103-110.
- [10] Sivak, R.I., Ogorodnikov, V.A., & Arkhipova, T.F. (2022). *Nonmonotonic plastic deformation in metal forming processes*. Vinnytsia: VNAU.
- [11] Matviychuk, V., Mikhalevich, V., & Shtuts, A. (2023). Analysis of stress-strain state (sss) of billet material in the course of setting by resource-saving method of roll stamping. *Vibrations in Engineering and Technology*, 1(108), 63-72. doi: 10.37128/2306-8744-2023-1-7.
- [12] Sukhorukov, S.I., Kotsiubivska, K.I., & Syvak, I.O. (2009). Estimation of the deformability of workpieces during transverse wedge rolling. *Scientific Notes*, 25, 272-275.
- [13] Mykhalevych, V.M., Dobranyuk, Yu.V., Tyutyunnyk, O.I., & Kolisnyk, M.A. (2024). Linear and nonlinear models in the theory of damage summation. *Materials Working by Pressure: Collection of Scientific Works*, 1(53), 100-108. doi: 10.37142/2076-2151/2024-1(53)100.
- [14] Mykhalevych, V., Dobraniuk, Y., Matviichuk, V., Kraievskyi, V., Tiutiunnyk O., Smailova, S., & Kozbakova, A. (2023). A comparative study of various models of equivalent plastic strain to fracture. *Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska*, 13(1), 64-70. doi: 10.35784/iapgos.3496.
- [15] Mykhalevych, V.M., & Dobranyuk, Y.V. (2013). *Modeling of elastically deformed and limit states of the surface of cylindrical specimens under end compression*. Vinnytsia: VNTU.
- [16] Mykhalevych, V.M., Dobranyuk, Y.V., & Kraevsky, O.V. (2018). *Comparative study of models of limit plastic deformations*. *Journal of Mechanical Engineering and Transport*, 2(8), 56-64.
- [17] Mozharovskiy, M.S. (2022). *Theory of elasticity, plasticity and creep*. Kyiv: Vyscha shkola.

**Volodymyr Mykhalevych**

Doctor of Technical Sciences, Professor  
 Vinnytsia National Technical University  
 21021, 95 Khmelnytske Shose Str., Vinnytsia, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0003-1557-7331>

**Oleksandr Hrushko**

Doctor of Technical Sciences, Professor  
 Vinnytsia National Technical University  
 21021, 95 Khmelnytske Shose Str., Vinnytsia, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0001-5551-375X>

**Yurii Dobraniuk**

PhD in Technical Sciences, Associate Professor  
 Vinnytsia National Technical University  
 21021, 95 Khmelnytske Shose Str., Vinnytsia, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0001-6387-6331>

**Oksana Tiutiunnyk**

PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor  
 Vinnytsia National Technical University  
 21021, 95 Khmelnytske Shose Str., Vinnytsia, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-8544-4246>

## Stressed state of a thick-walled pipe under the action of internal pressure and axial force

**Abstract.** A classical problem of determining the stress state of a thick-walled pipe with fixed bottoms under the action of internal pressure and the axial force generated by it is considered. Under these conditions, the axial strain is zero. The scheme of a perfectly plastic body is accepted. Information Maple technologies for all key stages of solving this problem have been developed. In order to analyse the pipe material for plastic deformation without fracture, the basic differential equation of the problem is formulated and solved with respect to the stress state index, which is equal to the ratio of the first invariant of the stress tensor to the stress intensity. It is shown that the boundary conditions lead to a system of three linear inhomogeneous equations with respect to unknown parameters of the stress equations. It is determined that this system always has a solution, since the determinant of the system matrix is inversely proportional to the square of the radius of the boundary separating the plastic and elastic regions of the pipe and is always different from zero. It is shown that the equation that establishes the relationship between the applied pressure and the radius of the boundary between the plastic and elastic regions cannot be solved directly with respect to an unknown radius. However, it is advisable to use it in a form solved with respect to pressure. The calculated distributions of stress components normalised by the yield strength along the pipe thickness are consistent with the literature data, which confirm that the maximum values of the circumferential load are observed on the outer surface. This is interpreted as a sign of the reliability of the theoretical solution to Bridgman's experimental data, according to which the material fracture of a thick-walled pipe loaded with internal pressure begins from the outer surface. The regularities of changes in the stress state index obtained in this work improve the above justification, since from the standpoint of the theory of deformability of materials during cold deformation, the ultimate deformations of the material usually decrease with the growth of the stress state index, the highest values of which occur at the points of the outer surface and reach the value  $\sqrt{3}$ .

**Keywords:** thick-walled pipe; uniform pressure; stress state; indicator of the stress state