

# МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ КОЛІСНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ ПІД ЧАС РУХУ ШЛЯХОМ ІЗ НЕРІВНОСТЯМИ

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

У роботі викладено основні положення методології аналітичного дослідження впливу поодиноких нерівностей шляху на поздовжньо-кутові коливання підресореного корпусу колісних транспортних засобів. За фізичну модель для проведення досліджень вибрано плоску систему трьох тіл (передній, задній мости, підресорена частина), відносний рух яких здійснюється у вертикальній площині. Особливістю її є те, що підресорена та непідресорена частини взаємодіють між собою пружними амортизаторами із нелінійними характеристиками відновлювальної сили. Щодо нерівностей шляху, то вважається, що вони описуються гладкими функціями і під час руху колісного транспортного засобу шини безвідривно контактують із опорною поверхнею. Побудовано математичну модель динаміки підресореної частини, яка описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку із такою особливістю: права його частина є кусково-неперервною функцією. За фізично обґрунтованих припущень побудовано розв'язок диференціального рівняння, яке описує відносні поздовжньо-кутові коливання підресореної частини. Він базується на ідеї використання спеціальних періодичних Атеб-функцій для побудови розв'язку диференціальних рівнянь із степеневою нелінійністю; побудови асимптотичних наближень з використанням вказаних функцій для нових класів диференціальних рівнянь. У сукупності наведене дозволило отримати диференціальні рівняння у стандартному вигляді, які описують амплітудно-частотну характеристику коливань підресореної частини. Щодо впливу поодиноких нерівностей на динаміку підресореної частини, то амплітуда поздовжньо-кутових коливань виходу із нерівності є меншою: за більших швидкостей руху транспортних засобів; для систем підвісок із регресивним законом зміни відновлювальної сили пружних амортизаторів; за менших величин їхньої статичної деформації для прогресивної характеристики системи підресорування (і більших – для регресивної). Отримано аналітичні залежності, проведено розрахунки та побудовано залежності, які описують амплітуду та частоту цих коливань від параметрів нерівностей та швидкості руху.

Отримані результати можуть бути базою не тільки для оцінки якості системи підресорування, але і розробки алгоритмів системи керування жорсткістю підвіски з метою покращення експлуатаційних характеристик.

**Ключові слова:** колісний транспортний засіб, система підресорування, нелінійна пружна характеристика, поздовжньо-кутові коливання, амплітуда, частота.

## Вступ

Подальший розвиток методологій досліджень динаміки руху транспортних засобів (ТЗ) по нерівностях полягає, в основному, в усе більшому ускладненні математичних моделей, обліку неохоплених нелінійностей та моделюванню роботи нових перспективних вузлів підвіски. При цьому виділилося два підходи: розв'язання задачі у детермінованій постановці або з використанням методів статистичної динаміки. Їхньою докорінною відмінністю є спосіб представлення нерівностей – або у вигляді наперед заданої функції (грунтові дороги, одиничні нерівності, пересічена місцевість), або у вигляді випадкової величини (дороги з покриттям різних категорій). В силу низки причин, детермінований підхід отримав широке поширення при дослідженні руху військових колісних і гусеничних машин. Він забезпечує можливість врахувати усі необхідні нелінійності та забезпечує високу точність отриманих результатів. У свою чергу, статистичний підхід застосовується при дослідженні ТЗ цивільного призначення і в силу складності свого математичного апарату вимагає максимального спрощення математичної моделі, використання лінійних диференціальних рівнянь і роботи з найпростішими нелінійностями, що призводить до більших похибок.

При застосуванні детермінованого підходу, в існуючих методологіях моделювання руху ТЗ по нерівностях, рівняння, що описують динаміку системи, як правило, засновані або на законах Ньютона, або на рівняннях Лагранжа 2-го роду. Вони приводять до системи диференціальних рівнянь другого порядку. Якщо ньютоніві і лагранжеві рівняння складаються в однакових системах координат, то динаміка системи буде описуватися тими ж самими рівняннями. Значно рідше використовується класичний метод Гамільтона, що викликано його складністю.

Отримані системи диференціальних рівнянь здебільшого вирішуються шляхом чисельного інтегрування, що вимагає розробки відповідного програмного забезпечення. В результаті дослідження займають достатній час і потребують матеріальних витрат. Саме тому актуальним є запропонований напрямок подальшого розвитку методології досліджень динаміки руху ТЗ по нерівностях, що базується

на загальних ідеях методів збурень (методу Ван-дер-Поля) у поєднанні із теорією спеціальних періодичних Атеб-функцій. Така методологія полягає в аналітичному розв'язанні системи диференціальних рівнянь, які описують нелінійну математичну модель динаміки руху ТЗ по нерівностях. Це дасть можливість швидко, з незначними витратами, якісно оцінити вплив тих чи інших характеристик систем підресорювання (СП, підвіски), режимів та умов руху на коливання підресореного корпусу (ПК) ТЗ і зробити висновки щодо подальшого вибору параметрів підвіски або розробки алгоритмів керування її пружною характеристикою.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Основні методології дослідження динаміки руху ТЗ по нерівностях, що засновані на детермінованому підході, докладно представлені у роботах [1–3]. Розглянуто їхні переваги, недоліки та приклади застосування. Методики розрахунку характеристик пружних елементів (ПЕ) та демпфірувальних пристроїв (ДП) підвіски як без, так і з врахуванням кінематики направляючих пристроїв підвіски та їхній вплив на експлуатаційні властивості ТЗ, докладно розглянуто у роботах [4–6].

Сучасні тенденції подальшого удосконалення СП складаються у підвищенні її енергоємності та відбуваються у напрямках одночасного збільшення динамічного ходу підвіски, забезпечення нелінійної прогресивної характеристики ПЕ і підвищення роботи (сил опору) ДП. У свою чергу, використання нелінійної характеристики ПЕ приводить до зміни власних частот коливань ПК, особливо при підвищенні завантаження ТЗ, яке викликає збільшення статичного ходу підвіски. Це призводить до підвищення приведеної жорсткості підвіски та власних частот коливань ПК, які можуть вийти за допустимі межі ергономічних вимог, що значно погіршить плавність ходу [6–8]. У роботах [9–14] показано, що підвіска з нелінійною прогресивною пружною характеристикою має переваги у забезпеченні більш високих експлуатаційних властивостей ТЗ, які, у свою чергу, значним чином впливають на тактико-технічні характеристики бойових броньованих машин (ББМ). Із застосуванням методології на основі використання теорії спеціальних періодичних Атеб-функцій, було розглянуто вертикальні та поперечно-кутові коливання ПК, досліджено залежність частоти власних коливань від амплітуди цих коливань та їхній вплив на стійкість руху і керованість ТЗ.

Тим не менш, поздовжньо-кутові коливання ПК ТЗ із застосуванням згаданого математичного апарату на цей час не розглянуто. Дослідження цих коливань є більш складним і має науковий і практичний інтерес щодо їхнього впливу на плавність ходу, керованість та стійкість руху ТЗ. Вирішення цього питання і розглядається в роботі, що обумовлює її актуальність.

### Мета досліджень

Провести дослідження поздовжньо-кутових коливань ПК колісного ТЗ при русі по нерівностях на основі застосування методу Ван-дер-Поля і теорії спеціальних періодичних Атеб-функцій та дослідити зміни амплітуди та частоти поздовжньо-кутових коливань ПК в залежності від швидкості руху і параметрів нерівностей.

### Матеріал і методика дослідження

Дослідження проводилися на прикладі двовісної колісної ББМ Дозор-Б, НММWV та інших ББМ цього класу при їхньому русі по гармонічних нерівностях заданих параметрів, однакових під правим і лівим бортами. Машина представлялася у вигляді системи з одним ступенем свободи  $\varphi(t)$  – поздовжньо-кутові коливання ПК), відриви коліс від ґрунту та пробої підвіски були відсутні, підресорені маси та деформація ПК не враховувалися. Застосовувалася наведена схема підвіски (кінематика підвіски не враховувалася), характеристики ПЕ та ДП приймалися нелінійними. Для розв'язання диференціальних рівнянь використовувалася запропонована автором методологія дослідження динаміки руху ТЗ на основі методу Ван-дер-Поля та застосування теорії спеціальних періодичних Атеб-функцій. Прийнята розрахункова схема представлена на рис. 1, де 1 – підресорений корпус, 2 – пружні елементи, 3 – демпфірувальні пристрої.

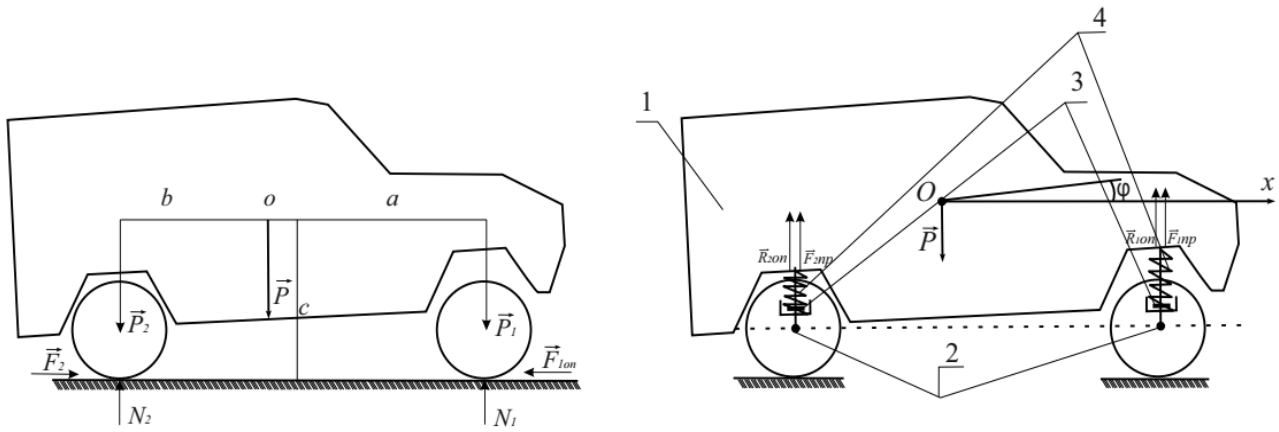


Рис. 1. Розрахункова схема для дослідження поздовжньо-кутових коливань ПК

Тут:  $F_{np}$  – реакція ґрунту, обумовлена дією ПЕ,  $R_{on}$  – реакція ґрунту, обумовлена дією ДП,  $P$  – сила ваги ПК.

Поперечний переріз  $j$ -ї нерівності правого та лівого бортів описується функцією

$$z_j(x) = \begin{cases} h_j \sin^{2s_j} \frac{\pi x}{d_j}, & \text{нпу } x_j \leq x \leq x_j + d_j \\ 0, & \text{нпу } x_j + d \leq x \leq x_{j+1}, \quad j=1,2,3,\dots, \end{cases} \quad (1)$$

де  $h_j$  – висота;  $d_j$  – довжина  $j$ -ї нерівності;  $s_j$  – параметр, який описує її форму.

Висота нерівностей приймається за малу величину порівняно з статичною деформацією ПЕ.

Характеристики ПЕ та ДП описуються нелінійними функціями відповідно деформації та її швидкості:  $F_{inp.} = c_i \Delta_i^{\nu+1}$ ,  $R_{on.} = \alpha_i \dot{\Delta}_i^{r+1}$ , де  $c_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $r$ ,  $\nu$  – сталі,  $\Delta_i$  та  $\dot{\Delta}_i$  – відповідно, деформація ПЕ та її швидкість ( $i=1$  – для передньої підвіски та  $i=2$  – для задньої підвіски). Максимальне значення сили опору ДП є значно меншою величиною за максимальне значення сили ПЕ.

Положення  $u$ ,  $v$ . ПК по відношенню до бази ТЗ у горизонтальному положенні визначається параметрами  $a, b, c$ . Відносне горизонтальне переміщення  $u$ ,  $v$ . ПК є малою величиною і ним під час руху ТЗ будемо нехтувати.

Визначимо вплив нерівностей на поздовжньо-кутові коливання ПК.

За умови сталої швидкості руху  $v$  ТЗ, профіль нерівностей можна представити функцією часу у вигляді

$$z_j(t) = \begin{cases} h_j \sin^{2s_j} \frac{\pi}{d_j} Vt & \text{нпу } t_j \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V}, \\ 0 & \text{нпу } t_j + \frac{d_j}{V} \leq t \leq t_{j+1}, \quad j=1,2,3,\dots, \end{cases} \quad (2)$$

де  $t_j = \frac{x_j}{V}$  – момент підходу колеса ТЗ до  $j$ -ї нерівності шляху.

Тоді диференціальне рівняння поздовжньо-кутових коливань ПК можна записати у вигляді

$$I_O \ddot{\phi}(t) = \begin{cases} -a(F_{1np.}(\bar{\Delta}_{1j}) + R_{1on.}(\bar{\Delta}_{1j})) + b(F_{2np.}(\Delta_{2j}) + R_{1on.}(\dot{\Delta}_{2j})), & \text{нпу } t_j \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V}; \\ -a(F_{1np.}(\Delta_{1j}) + R_{1on.}(\dot{\Delta}_{1j})) + b(F_{2np.}(\Delta_{2j}) + R_{1on.}(\dot{\Delta}_{2j})), & \text{нпу } t_j + \frac{d_j}{V} \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V} + \tau_j; \\ -a(F_{1np.}(\Delta_{1j}) + R_{1on.}(\dot{\Delta}_{1j})) + b(F_{2np.}(\bar{\Delta}_{2j}) + R_{1on.}(\bar{\Delta}_{2j})), & \text{нпу } t_j + \frac{d_j}{V} + \tau_j \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V} + 2\tau_j; \\ -a(F_{1np.}(\Delta_{1j}) + R_{1on.}(\dot{\Delta}_{1j})) + b(F_{2np.}(\Delta_{2j}) + R_{1on.}(\dot{\Delta}_{2j})), & \text{нпу } t_j + \frac{d_j}{V} + 2\tau_j \leq t \leq t_{j+1}; \end{cases} \quad (3)$$

де  $I_O$  – момент інерції ПК відносно горизонтальної осі, яка проходить через  $ц. в.$  і перпендикулярна до вектора переносного переміщення  $ц. в.$  ПК;  $\bar{\Delta}_{1j}$  та  $\dot{\bar{\Delta}}_{1j}$  – деформація і швидкість деформації ПЕ передньої підвіски під час її переїзду  $j$ -ї нерівності (протягом інтервалу часу  $t_j \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V}$ );  $\Delta_{1j}$  та  $\dot{\Delta}_{1j}$  – деформація та швидкість деформації ПЕ передньої підвіски за умови, що переднє колесо знаходиться за межами нерівності;  $\bar{\Delta}_{2j}$  та  $\dot{\bar{\Delta}}_{2j}$  – деформація та швидкість деформації ПЕ задньої підвіски під час її переїзду  $j$ -ї нерівності (протягом інтервалу часу  $t_j + \frac{d_j}{V} + \tau_j \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V} + 2\tau_j$ );  $\Delta_{2j}$  та  $\dot{\Delta}_{2j}$  – деформація і швидкість деформації ПЕ задньої підвіски за умови, що заднє колесо знаходиться за межами нерівності;  $\tau_j$  – час руху, за який ТЗ долає відстань  $\rho_j = a + b - d_j$ , тобто  $\tau_j = \frac{a + b - d_j}{V}$ .

По відношенню до системи відліку із початком у положенні статичної рівноваги ПК деформації та швидкості деформацій в довільний момент часу рівні:

$$\begin{aligned} \Delta_{1j} &= \phi(t)a - \Delta_{cm.}, \\ \Delta_{2j} &= \phi(t)b + \Delta_{cm.}, \\ \bar{\Delta}_{1j} &= \phi(t)a - \Delta_{cm.} + z_j(t), \\ \bar{\Delta}_{2j} &= \phi(t)b + \Delta_{cm.} + z_j(t), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{1j} &= \dot{\phi}(t)a, \\ \dot{\Delta}_{2j} &= \dot{\phi}(t)b, \\ \dot{\bar{\Delta}}_{1j} &= \dot{\phi}(t)a + \dot{z}_j(t), \\ \dot{\bar{\Delta}}_{2j} &= \dot{\phi}(t)b + \dot{z}_j(t), \end{aligned} \tag{5}$$

де  $\Delta_{cm.}$  – статична деформація ПЕ.

Наведене у сукупності дозволяє записати диференціальне рівняння малих поздовжньо-кутових коливань ПК під час руху ТЗ по нерівностях у такому вигляді:

$$I_O \ddot{\phi} + (c_1 a^{\nu+2} + c_2 b^{\nu+2}) \phi^{\nu+1} = \begin{cases} -c_1 (\nu+1) a^{\nu+1} \phi^\nu (z_j(t) - \Delta_{cr}) - \alpha_1 (a\dot{\phi} + \dot{z}_j(t))^{\eta+1} - c_2 (\nu+1) b^{\nu+1} \phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_2 (b\dot{\phi})^{\eta+1}, & \text{при } t_j \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V}; \\ +c_1 (\nu+1) a^{\nu+1} \phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_1 (a\dot{\phi})^{\eta+1} - c_2 (\nu+1) b^{\nu+1} \phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_2 (b\dot{\phi})^{\eta+1}, & \text{при } t_j + \frac{d_j}{V} \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V} + \tau_j; \\ +c_1 (\nu+1) a^{\nu+1} \phi^\nu \Delta_{cr} - c_2 (\nu+1) b^{\nu+1} \phi^\nu (z_j(t) + \Delta_{cr}) - \alpha_1 (a\dot{\phi})^{\eta+1} - \alpha_2 (b\dot{\phi} + \dot{z}_j(t))^{\eta+1}, & \text{при } t_j + \frac{d_j}{V} + \tau_j \leq t \leq t_j + \frac{d_j}{V} + 2\tau_j; \\ +c_1 (\nu+1) a^{\nu+1} \phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_1 (a\dot{\phi})^{\eta+1} - c_2 (\nu+1) b^{\nu+1} \phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_2 (b\dot{\phi})^{\eta+1}, & \text{при } t_j + \frac{d_j}{V} + 2\tau_j \leq t \leq t_{j+1}. \end{cases} \tag{6}$$

Розглядається випадок, для якого довжини нерівностей шляху є меншими ніж база автомобіля, тобто  $a + b > d_j$ , у іншому випадку диференціальні рівняння поздовжньо-кутових коливань ПК будуть дещо відрізнятись.

Математична модель об'єкта, що досліджується, повинна включати в себе крім диференціального рівняння (6) ще й початкові умови та умови спряження. Початкові умови визначаються умовами «входження» ПК у першу нерівність і для загального випадку вони мають вигляд

$$\phi(t)|_{t=0} = \phi_0, \quad \dot{\phi}(t)|_{t=0} = \omega_0, \tag{7}$$

де  $\phi_0$  та  $\omega_0$  відповідно амплітуда та початкова кутова швидкість поздовжньо-кутових коливань ПК.

Щодо умов спряження, то виходячи із неперервності відносного руху ПК, вони матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \phi(t)|_{\tau_j-0} &= \phi(t)|_{\tau_j+0}, & \phi(t)|_{\rho_j-0} &= \phi(t)|_{\rho_j+0}, & \phi(t)|_{\rho_j+d_j-0} &= \phi(t)|_{\rho_j+d_j+0}, \\ \dot{\phi}(t)|_{\tau_j-0} &= \dot{\phi}(t)|_{\tau_j+0}, & \dot{\phi}(t)|_{\rho_j-0} &= \dot{\phi}(t)|_{\rho_j+0}, & \dot{\phi}(t)|_{\rho_j+d_j-0} &= \dot{\phi}(t)|_{\rho_j+d_j+0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином, у першому наближенні, відносні поздовжньо-кутові коливання ПК під час руху колісного ТЗ по нерівностям описуються диференціальним рівнянням (6) за умов (7) та (8).

Методика дослідження відносних поздовжньо-кутових коливань ПК колісного ТЗ, яка пропонується, полягає у визначенні впливу множини параметрів (геометричних, кінематичних, силових) на динаміку процесу, шляхом аналітичного розв’язання диференціального рівняння (6). Для його знаходження використаємо базові засади методів збурень [15–17] або, точніше кажучи, основну ідею методу Ван-дер-Поля адаптовану до коливальних систем із степеневою нелінійністю. Підставою для використання вказаного служать обмеження щодо силових характеристик СП та геометричних параметрів нерівностей.

Для ефективної реалізації методу Ван-дер-Поля стосовно сформульованої вище задачі побудуємо перш за все розв’язок незбуреного її аналогу, тобто рівняння

$$I_0 \ddot{\phi}_0 + (c_1 a^{v+2} + c_2 b^{v+2}) \phi_0^{v+1} = 0. \quad (9)$$

Останнє буде описувати незатухаючий коливальний процес ПК якщо параметр  $v$  можна представити у вигляді  $v = (2m+1)/(2n+1) - 1$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ). В такому разі функціями у вигляді  $F_{i\text{пр.}} = c_i \Delta_i^{v+1}$  з достатнім ступенем точності можна апроксимувати широкий спектр нелінійних пружних характеристик СП, зокрема, як прогресивний та регресивний закони їхньої зміни.

Розв’язок рівняння (9) у даному випадку можна записати у явному вигляді за допомогою періодичних Атеб-функцій [18, 19]

$$\phi_0(t) = a_\phi ca(v+1, 1, \omega(a_\phi)t + \theta), \quad (10)$$

де  $a_\phi$ , та  $\omega(a_\phi) = \sqrt{(c_1 a^{v+2} + c_2 b^{v+2})(v+2)/(2I_0)} a_\phi^{\frac{v}{2}}$  – відповідно амплітуда та частота власних поздовжньо-кутових коливань ПК,  $\omega(a_\phi)t + \theta$  – їхня фаза.

Якщо у виразі для частоти власних коливань перейти до статичної деформації ПЕ, урахувавши при цьому, що  $c_2 = \kappa c_1$  ( $\kappa$  – відома стала),  $c_1 = P / ((1 + \kappa) \Delta_{\text{ст.}}^{v+1})$  ( $\Delta_{\text{ст.}}$  – статична деформація ПЕ), то частоту власних коливань можна подати у вигляді

$$\omega(a_\phi) = \sqrt{P(a^{v+2} + \kappa b^{v+2})(v+2)/(2(1+\kappa)I_0 \Delta_{\text{ст.}}^{v+1})} a_\phi^{\frac{v}{2}}. \quad (11)$$

Наведена залежність показує одну із принципів різниць коливань ПК колісного ТЗ із нелінійною характеристикою СП порівняно із лінійним її аналогом – частота власних нелінійних коливань ПК залежить від амплітуди. Що стосується останньої, то зовнішні чинники та ДП ведуть до її зміни в часі.

Проведемо дослідження впливу вказаних факторів на закони зміни амплітуди і частоти коливань при русі по одиничній нерівності.

Відповідно до запропонованої методики, збурений рух ПК описується залежністю  $\phi(t) = a_\phi(t) ca(v+1, 1, \psi(t))$ , у якій невідомі функції  $a_\phi(t)$  та  $\psi(t)$  визначаються так, щоб остання залежність задовольняла із необхідним ступенем точності рівняння

$$\ddot{\phi} + \frac{c_1 a^{v+2} + c_2 b^{v+2}}{I_0} \phi^{v+1} = \frac{1}{I_0} F\left(a_\phi, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right) = \frac{1}{I_0} \begin{cases} F_1\left(a, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right), & \text{нпу } 0 \leq t \leq \frac{d_1}{V}, \\ F_2(a, \psi), & \text{нпу } \frac{d_1}{V} \leq t \leq \frac{d_1}{V} + \tau_1, \\ F_3\left(a, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right), & \text{нпу } \frac{d_1}{V} + \tau_1 \leq t \leq \frac{d_1}{V} + 2\tau_1, \\ F_4(a, \psi) & \text{нпу } t \geq \frac{d_1}{V} + 2\tau_1. \end{cases} \quad (12)$$

та початкові умови і умови спряження, які впливають з (7) та (8).

У співвідношенні (12) функції  $F_1\left(a, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right)$ ,  $F_2(a, \psi)$ ,  $F_3\left(a, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right)$ ,  $F_4(a, \psi)$  визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 F_1\left(a, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right) &= \left[ -c_1(\nu+1)a^{\nu+1}\phi^\nu(z_1(t) - \Delta_{\text{cr}}) - \alpha_1(a\dot{\phi} + \dot{z}_1(t))^{r+1} - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}\phi^\nu\Delta_{\text{cr}} - \alpha_2(b\dot{\phi})^{r+1} \right]_{\substack{\phi(t)=a_\phi(t)ca(\nu+1,1,\psi(t)) \\ z_1(t)=h_1\sin^{2s_1}\frac{\pi}{d_1}Vt}}, \\
 F_2(a, \psi) &= \left[ c_1(\nu+1)a^{\nu+1}\phi^\nu\Delta_{\text{cr}} - \alpha_1(a\dot{\phi})^{r+1} - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}\phi^\nu\Delta_{\text{cr}} - \alpha_2(b\dot{\phi})^{r+1} \right]_{\phi(t)=a_\phi(t)ca(\nu+1,1,\psi(t))}, \\
 F_3\left(a, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right) &= \left[ c_1(\nu+1)a^{\nu+1}\phi^\nu\Delta_{\text{cr}} - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}\phi^\nu(z_1(t) + \Delta_{\text{cr}}) - \alpha_1(a\dot{\phi})^{r+1} - \alpha_2(b\dot{\phi} + \dot{z}_1(t))^{r+1} \right]_{\substack{\phi(t)=a_\phi(t)ca(\nu+1,1,\psi(t)) \\ z_1(t)=h_1\sin^{2s_1}\frac{\pi}{d_1}Vt}}, \\
 F_4(a, \psi) &= \left[ c_1(\nu+1)a^{\nu+1}\phi^\nu\Delta_{\text{cr}} - \alpha_1(a\dot{\phi})^{r+1} - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}\phi^\nu\Delta_{\text{cr}} - \alpha_2(b\dot{\phi})^{r+1} \right]_{\phi(t)=a_\phi(t)ca(\nu+1,1,\psi(t))}.
 \end{aligned}$$

Знаходження невідомих функцій  $a_\phi(t)$  та  $\theta(t)$  виконаємо як в роботі [14] і отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned}
 \frac{da_\phi}{dt} &= \frac{sa(1, \nu+1, \psi)}{\omega(a_\phi)I_0} F\left(a_\phi, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right); \\
 \frac{d\theta(t)}{dt} &= \frac{(\nu+2)ca(\nu+1,1,\psi)}{2a_\phi\omega(a_\phi)I_0} F\left(a_\phi, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right),
 \end{aligned} \tag{13}$$

де  $F\left(a_\phi, \psi, \frac{\pi V}{d_1} t\right)$  визначається відповідно до правої частини рівняння (12) за умови, що

$$\phi = a_\phi ca(\nu+1,1,\psi), \text{ а } z_1(t) = h_1 \sin^{2s_1} \frac{\pi}{d_1} Vt.$$

Таким чином, при дослідженні поздовжньо-кутових коливань колісного ТЗ за відповідною їй математичною моделлю визначальні параметри коливань ПК описуються диференціальним рівнянням (13) за умов (6), (7). Якщо: а) силові параметри СП такі, що задовольняють ергономічні вимоги експлуатації у широкому діапазоні зміни амплітуди коливань; б) нерівності шляху незначної довжини; в) швидкість руху ТЗ є такою, що час руху переднього (заднього) колеса по нерівності є малою величиною порівняно із періодом власних коливань ПК [17] ( $2\pi / \omega(a_\phi) \gg d/V$ ), то систему диференціальних рівнянь (13) можна значно спростити. Підставою для її спрощення є: зміна частоти (фази) коливань за час руху колеса по нерівності є малою величиною, а отже у відповідних співвідношеннях правих частин диференціальних рівнянь (12) можна обмежитись мажоруючими величинами. Після спрощення отримаємо

$$\frac{da_\phi}{dt} = \frac{1}{\omega(a_\phi)I_0} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -c_1(\nu+1)a^{\nu+1}a_\phi^\nu \left( h \sin^{2s} \frac{\pi V}{d} t - \Delta_{cr} \right) - \alpha_1 \left( a \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) + h2s \frac{\pi V}{d} \cos \frac{\pi V}{d} t \sin^{2s-1} \frac{\pi V}{d} t \dot{z}_1(t) \right)^{r+1} - \right. \\ & \left. - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}a_\phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_2 \left( b \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) \right)^{r+1} \right] \text{ нпу } 0 \leq t \leq \frac{d_1}{V} \\ & - \frac{(\alpha_1 a^{\nu+2} + \alpha_2 b^{\nu+2}) a_\phi \left( \frac{2a_\phi \omega(a_\phi)}{(\nu+2)} \right)^{r+1}}{2\Pi I_0} \Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu+2} + \frac{r+2}{2}\right), \text{ нпу: } \frac{d_1}{V} \leq t \leq \frac{d_1}{V} + \tau_1, \\ & \left[ +c_1(\nu+1)a^{\nu+1}a_\phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_1 \left( a \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) \right)^{r+1} - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}a_\phi^\nu \left( h \sin^{2s} \frac{\pi V}{d} t + \Delta_{cr} \right) - \right. \\ & \left. - \alpha_2 \left( b \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) + h2s \frac{\pi V}{d} \cos \frac{\pi V}{d} t \sin^{2s-1} \frac{\pi V}{d} t \dot{z}_1(t) \right)^{r+1} \right] \text{ нпу } \frac{d_1}{V} + \tau_1 \leq t \leq \frac{d_1}{V} + 2\tau_1 \\ & - \frac{(\alpha_1 a^{\nu+2} + \alpha_2 b^{\nu+2}) a_\phi \left( \frac{2a_\phi \omega(a_\phi)}{(\nu+2)} \right)^{r+1}}{2\Pi I_0} \Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu+2} + \frac{r+2}{2}\right), \text{ нпу } t \geq \frac{d_1}{V} + 2\tau_1, \end{aligned} \right.$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a_\phi) + \frac{\nu+2}{2a_\phi \omega(a_\phi) I_0} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -c_1(\nu+1)a^{\nu+1}a_\phi^\nu \left( h \sin^{2s} \frac{\pi V}{d} t - \Delta_{cr} \right) - \alpha_1 \left( a \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) + h2s \frac{\pi V}{d} \cos \frac{\pi V}{d} t \sin^{2s-1} \frac{\pi V}{d} t \dot{z}_1(t) \right)^{r+1} - \right. \\ & \left. - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}a_\phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_2 \left( b \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) \right)^{r+1} \right] \text{ нпу } 0 \leq t \leq \frac{d_1}{V} \\ & - \frac{(\alpha_1 a^{\nu+2} + \alpha_2 b^{\nu+2}) a_\phi \left( \frac{2a_\phi \omega(a_\phi)}{(\nu+2)} \right)^{r+1}}{2\Pi I_0} \Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu+2} + \frac{r+2}{2}\right), \text{ нпу } \frac{d_1}{V} \leq t \leq \frac{d_1}{V} + \tau_1, \\ & \left[ +c_1(\nu+1)a^{\nu+1}a_\phi^\nu \Delta_{cr} - \alpha_1 \left( a \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) \right)^{r+1} - c_2(\nu+1)b^{\nu+1}a_\phi^\nu \left( h \sin^{2s} \frac{\pi V}{d} t + \Delta_{cr} \right) - \right. \\ & \left. - \alpha_2 \left( b \frac{2}{\nu+2} a_\phi \omega(a_\phi) + h2s \frac{\pi V}{d} \cos \frac{\pi V}{d} t \sin^{2s-1} \frac{\pi V}{d} t \dot{z}_1(t) \right)^{r+1} \right] \text{ нпу } \frac{d_1}{V} + \tau_1 \leq t \leq \frac{d_1}{V} + 2\tau_1 \\ & - \frac{(\alpha_1 a^{\nu+2} + \alpha_2 b^{\nu+2}) a_\phi \left( \frac{2a_\phi \omega(a_\phi)}{(\nu+2)} \right)^{r+1}}{2\Pi I_0} \Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu+2} + \frac{r+2}{2}\right), \text{ нпу } t \geq \frac{d_1}{V} + 2\tau_1, \end{aligned} \right.$$

На рис. 2 представлено, відповідно до наведеної вище системи диференціальних рівнянь, зміни в часі амплітуди поздовжньо-кутових коливань ПК за різних швидкостей руху ТЗ для  $I=8000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , висотою горбів  $h=0,25 \text{ м}$  та інших параметрів вказаних на рис.

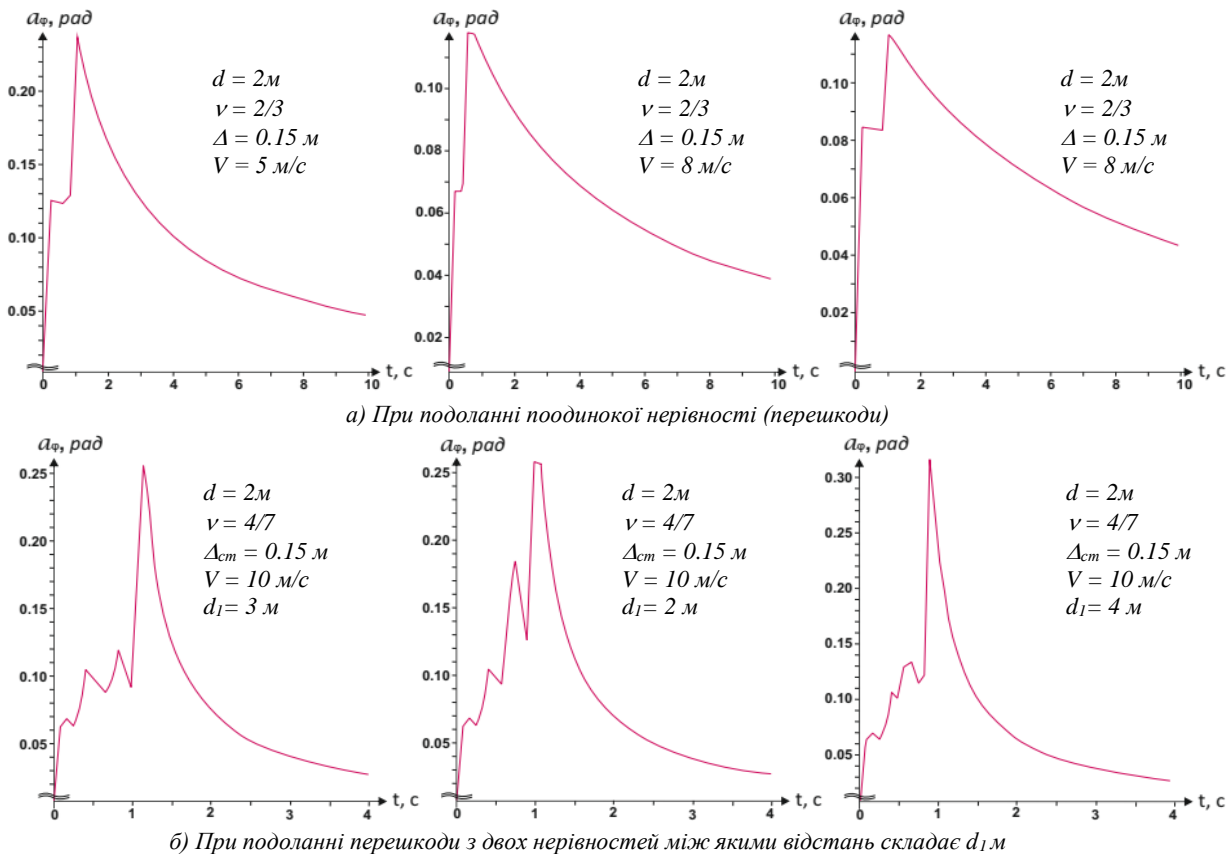


Рис. 2. Зміна в часі амплітуди поздовжньо-кутових коливань ПК під час руху колісного ТЗ по:  
а) одиничній перешкоді; б) подвійній перешкоді

## Висновки

1. Запропоновано методологію аналітичного розв'язання диференціальних рівнянь, що описують позовжньо-кутові коливання ПК колісного ТЗ під час руху по нерівностях на основі застосування методу Ван-дер-Поля та періодичних Атеб-функцій. Це дозволяє проводити кількісну і якісну оцінку динаміки СП для різних типів КТЗ.

2. Проведені із застосуванням запропонованої методології дослідження показали, що під час руху колісного ТЗ по нерівностях:

- для більших їхніх довжин амплітуда позовжньо-кутових коливань виходу із нерівності є більшою (за умови однакових швидкостей руху);

- за більших швидкостей руху, за однакових довжин нерівностей, амплітуда позовжньо-кутових коливань є меншою;

- амплітуда позовжньо-кутових коливань виходу із нерівностей для регресивної характеристики ПЕ є меншою ніж для лінійної, а для прогресивної навпаки (за однакових статичних деформацій).

- для ПЕ із прогресивною характеристикою за більших значень параметру  $\nu$  амплітуда позовжньо-кутових коливань є меншою.

- у випадку більшої відстані між нерівностями амплітуда коливань виходу із наступної нерівності є меншою, а якісна картина їхньої зміни в залежності від геометричних, кінематичних та силових параметрів зберігає всі особливості зміни амплітуди позовжньо-кутових коливань, як і під час подолання одиничної нерівності.

3. Отримані результати можуть бути застосовані при оцінці ефективності системи підресорювання із нелінійними характеристиками амортизаторів та розробці алгоритмів системи керування приведеною жорсткістю підвіски з метою покращення плавності ходу та забезпечення високих показників керованості і стійкості руху колісних ТЗ, у тому числі і ББМ.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Г. А. Смирнов, *Теория движения колесных машин*. Москва, Россия. Машиностроение, 1981.
- [2] Е. Е. Александров, Я. В. Грита, В. В. Дущенко и др. *Колебания в транспортных машинах*, Харьков, Украина: ХДПУ, 1996.
- [3] Е. Е. Александров, Д. О. Волонцевич, В. В. Дущенко, В. В. Епифанов, Н. В. Кохановский, *Математическое моделирование процессов возмущенного движения агрегатов и систем бронетанковой техники*. Харьков, Украина: НТУ "ХПИ", 2012.
- [4] Р. В. Ротенберг, *Подвеска автомобиля*. Москва, Россия. Машиностроение, 1972.
- [5] А. П. Солтус, *Теория эксплуатационных vlastивостей автомобиля: навчальний посібник для ВНЗ*. Київ, Україна. Арістей, 2010.
- [6] В. В. Дущенко, *Система підресорювання військових гусеничних і колісних машин: розрахунок і синтез*. Харків, Україна: НТУ "ХПИ", 2018.
- [7] Воениздат. *Руководство по эргономическому обеспечению создания военной техники сухопутных войск (РЭО-СВ-80)*. Москва, Россия: Воениздат, 1981.
- [8] *Вибрационная безопасность. Общие требования*. ГОСТ 12.2.012-2005.
- [9] M. Hrubel, R. Nanivskyi, M. Sokil, «Influence of characteristics of wheeled vehicle suspensions of its road-holding along curved stretches of track», *Science & military*. Liptovscy Mikulas, Slovak Republska, vol. 9, no. 1, pp. 15-19, 2014.
- [10] Б. І. Сокіл «Вплив характеристики підвіски на вертикальні та поперечно-кутові коливання корпусу армійських автомобілів багатоцільового призначення» на *4-а НТК Проблемні питання розвитку озброєння і військової техніки* Київ. ЦНДІ. 2013.
- [11] Б. І. Сокіл, Р. А. Нанівський, М. Г. Грубель, «Власні вертикальні коливання корпусу автомобіля з урахуванням нелінійних характеристик пружної підвіски» *Автошляховик України: науково-виробничий журнал*. № 5 (235), с. 15-18. 2013.
- [12] М. Г. Грубель, Р. А. Нанівський, М. Б. Сокіл, «Коливання ПЧ КТЗ та їх вплив на стійкість руху вздовж криволінійної ділянки шляху», *Науковий вісник НЛТУ України: збірник науково-технічних праць*. РВВ НЛТУ України, вип. 24.1., с. 155-162, 2014.
- [13] М. Г. Грубель, Р. А. Нанівський, М. Б. Сокіл, «Резонансні коливання ПЧ колісних транспортних засобів під час руху вздовж впорядкованої системи нерівностей», *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 1. с. 155-161, 2015.
- [14] B. Sokil, O. Lyashuk, M. Sokil, P. Popovich, Y. Vovk, O. Perenchuk. «Dynamic Effect of Cushion Part of Wheeled Vehicles on Their Steerability (2018)», *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, vol. 15, issue 1, pp. 4880-4892, March. Doi/org/10/15282/ijame/15.1.2018.1.0380.
- [15] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва, Россия: Наука, 1974.
- [16] Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики: учеб. пособие для ун-тов*. Москва, Россия: Наука, 1981.
- [17] П. М.Сеник, И. П. Смерека, Б. И. Сокил, «Асимптотический метод и периодические Атеб-функции в теории существенно нелинейных колебаний», в *Асимптотические и качественные методы в теории дифференц. уравнений*. Киев. Изд-во Ин-та математики, 1977.
- [18] П. М. Сеник, «Про Атеб-функції». *Доп. АН УРСР* № 1. 1968.



[19] М. Назаркевич, Дослідження залежностей Beta- та Ateb-функцій. Lviv Politechnic National Institutional Repository. <http://ena.lp.edu.ua>

**Нанівський Роман Антонович** – канд. техн. наук, доцент, начальник науково-організаційного відділу, e-mail: [roman\\_nani@ukr.net](mailto:roman_nani@ukr.net)

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів

**R. Nanivskyi**

## **Simulation of the wheeled vehicle dynamics during movement over road irregularities**

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy

*The paper outlines the main provisions of the methodology for analytical research of the individual road irregularities impact on the longitudinal-angular oscillations of the wheeled vehicle sprung body. A flat system of three bodies (front, rear bridges, sprung part), whose relative motion is in the vertical plane, was chosen as the physical model for the research. Its peculiarity is that the sprung and unsprung parts interact with each other as elastic shock absorbers with non-linear characteristics of the restoring force. As for road irregularities, it is considered that they are described by smooth functions and the tires are in constant contact with the supporting surface during the wheeled vehicle movement. A mathematical model of the sprung part dynamics was built, which is a second-order nonlinear differential equation with the following feature: its right-hand side is a piecewise continuous function. Based on physically justified assumptions, the differential equation solution was constructed, which describes the relative longitudinal-angular oscillations of the sprung part. It is based on the idea of using: the special periodic Ateb-functions to construct the solution of differential equations with exponential nonlinearity; the construction of asymptotic approximations using the specified functions for new classes of differential equations. Taken together, the above made it possible to obtain differential equations in the standard form, which describe the amplitude-frequency characteristics of the sprung part oscillations. As for the individual irregularities influence on the sprung part dynamics, the amplitude of the longitudinal-angular oscillations of the exit from the irregularity is smaller: at higher vehicle speed; for suspension systems with a regressive change law of the restoring force of elastic shock absorbers; at smaller values of their static deformation for the progressive characteristic of the suspension system (and at larger values for the regressive one). Analytical dependences were obtained, calculations were made and dependences were constructed that describe the amplitude and frequency of these oscillations caused by the irregularities parameters and motion speed.*

*The obtained results can be a basis not only for evaluating the quality of the suspension system, but also for developing algorithms for managing the suspension stiffness in order to improve operational characteristics.*

**Key words:** wheeled vehicle, suspension system, nonlinear elastic characteristic, longitudinal-angular oscillations, amplitude, frequency.

**Nanivskyi Roman** – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Head of the Scientific and Organizational Department, e-mail: [roman\\_nani@ukr.net](mailto:roman_nani@ukr.net)